¿Puede la entropía de cuencas ser un indicador de una bifurcación en sistemas con retardo temporal?

Juan P. Tarigo, Cecilia Stari, Cristina Masoller & Arturo C. Martí

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

cap COMISIÓN ACADÉMICA DE POSGRADO

PEDECIBA MEC-UDELAR

Índice

¿Qué es la entropía de cuencas?

- La entropía de cuencas fue introducida por Daza et. al. (2016) como una herramienta para cuantificar la predictibilidad del estado final de un sistema no-lineal debido a diferentes condiciones iniciales

Article | Open access | Published: 12 August 2016

Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems

Alvar Daza, Alexandre Wagemakers, Bertrand Georgeot, David Guéry-Odelin & Miguel A. F. Sanjuán

Scientific Reports **6**, Article number: 31416 (2016) | Cite this article

- Es una medida de la incertidumbre de un sistema obtenida a partir de la probabilidad de evolucionar a un atractor partiendo de una región del espacio de fase

- Recientemente fue utilizada para estudiar distintos tipos de bifurcaciones en sistemas no-lineales encontrando que la entropía de cuencas presenta cambios significativos ante la presencia de algunas bifurcaciones

ELSEVIER

Chaos, Solitons & Fractals

Volume 175, Part 1, October 2023, 113963

Using the basin entropy to explore bifurcations

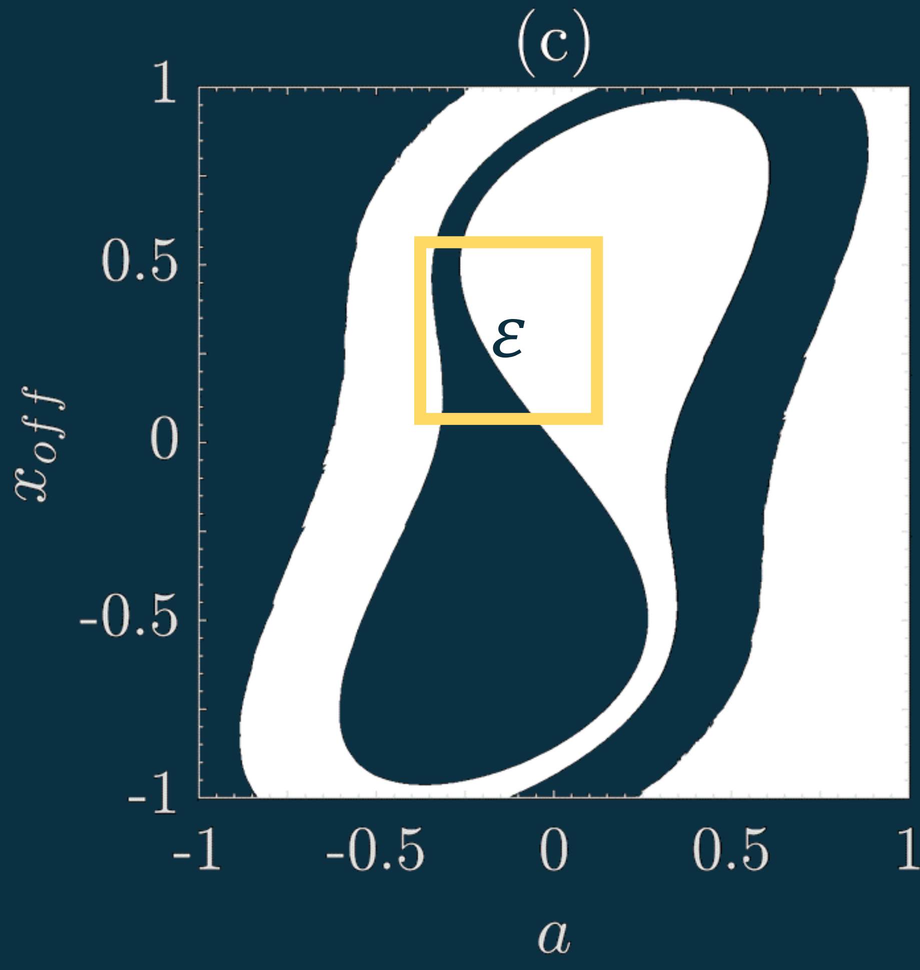
Alexandre Wagemakers [a], Alvar Daza [a b], Miguel A.F. Sanjuán [a]

$$S_b = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_A} p_{ij}\log p_{ij}$$

- N es el número de cajas para calcular S_b
- N_A es el número de atractores en la caja i
- p_{ij} es la cantidad de trayectorias en la caja i que van al atractor j

$$S_b = \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{n_k}{\tilde{n}} \varepsilon^{\alpha_k} \log(m_k)$$

- $\frac{n_k}{\tilde{n}}$ es un término de normalización asociado al tamaño de la caja
- $\alpha_k = D - D_k$ es el exponente de incertidumbre
- m_k es el número de atractores que comparten la $k-$esima frontera



Sistemas con retardo temporal

- El retardo temporal es inherente muchos sistemas físicos debido a velocidades de propagación y tiempos de procesamiento finitos

- Sistemas con retardo temporal pueden exhibir una gran variedad de fenomenos como bifurcaciones, oscilaciones, caos y multiestabilidad

- Estos sistemas muchas veces tienen dimensión infinita incluso para una unica DDE

DDE $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, x_\tau, t) \\ x_\tau = x(t-\tau) \end{cases} \longrightarrow x(t) \text{ depende de } x(\theta) \text{ with } \theta \in [t-\tau, t]$

Doble pozo con delay

- Un modelo simple para un sistema biestable con delay es: $\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = x - x^3 + cx(t-\tau)}$

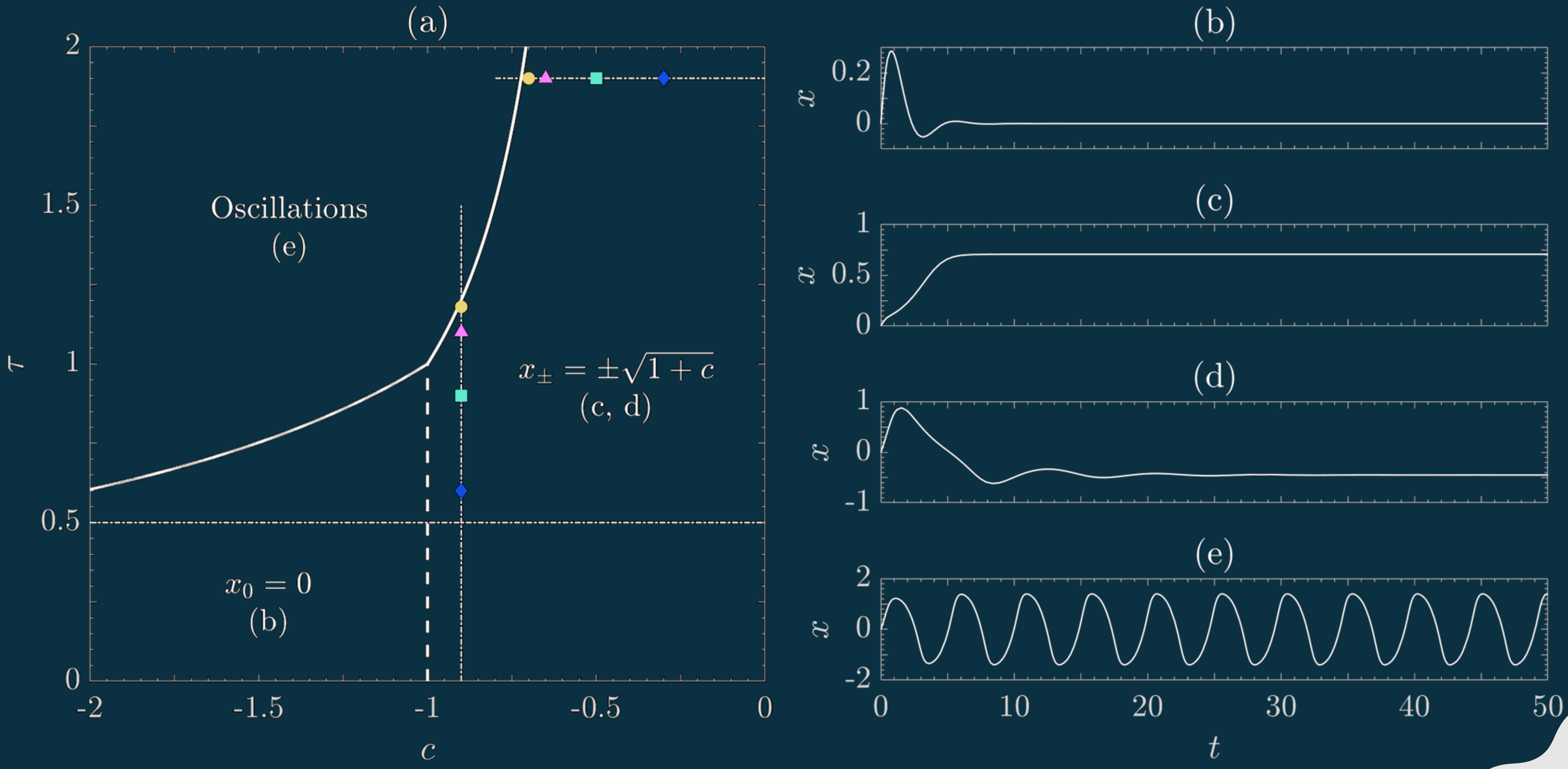
- Este sistema tiene tres soluciones de punto fijo:

$$x^* = 0 \text{ for } c < -1$$

$$x^* = \pm\sqrt{c+1} \text{ for } c \geq -1$$

- También presenta comportamiento oscilatorio, la línea de bifurcación de Hopf puede calcularse usando LSA:

$$\left(c = \frac{1}{\cos(s)}, \tau = -\frac{s}{\tan(s)}\right) \Bigg| \left(c = -\frac{2}{3 - \cos(s)}, \tau = \frac{s(3-\cos(s))}{2\sin(s)}\right)$$



(a)
Oscillations
(e)
$x_{\pm} = \pm\sqrt{1+c}$
(c, d)
$x_0 = 0$
(b)
τ
c
2
1.5
1
0.5
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
(b)
(c)
(d)
(e)
x
t
0.2
0
1
0.5
0
1
0
-1
2
0
-2
0
10
20
30
40
50

Simulación y condiciones iniciales

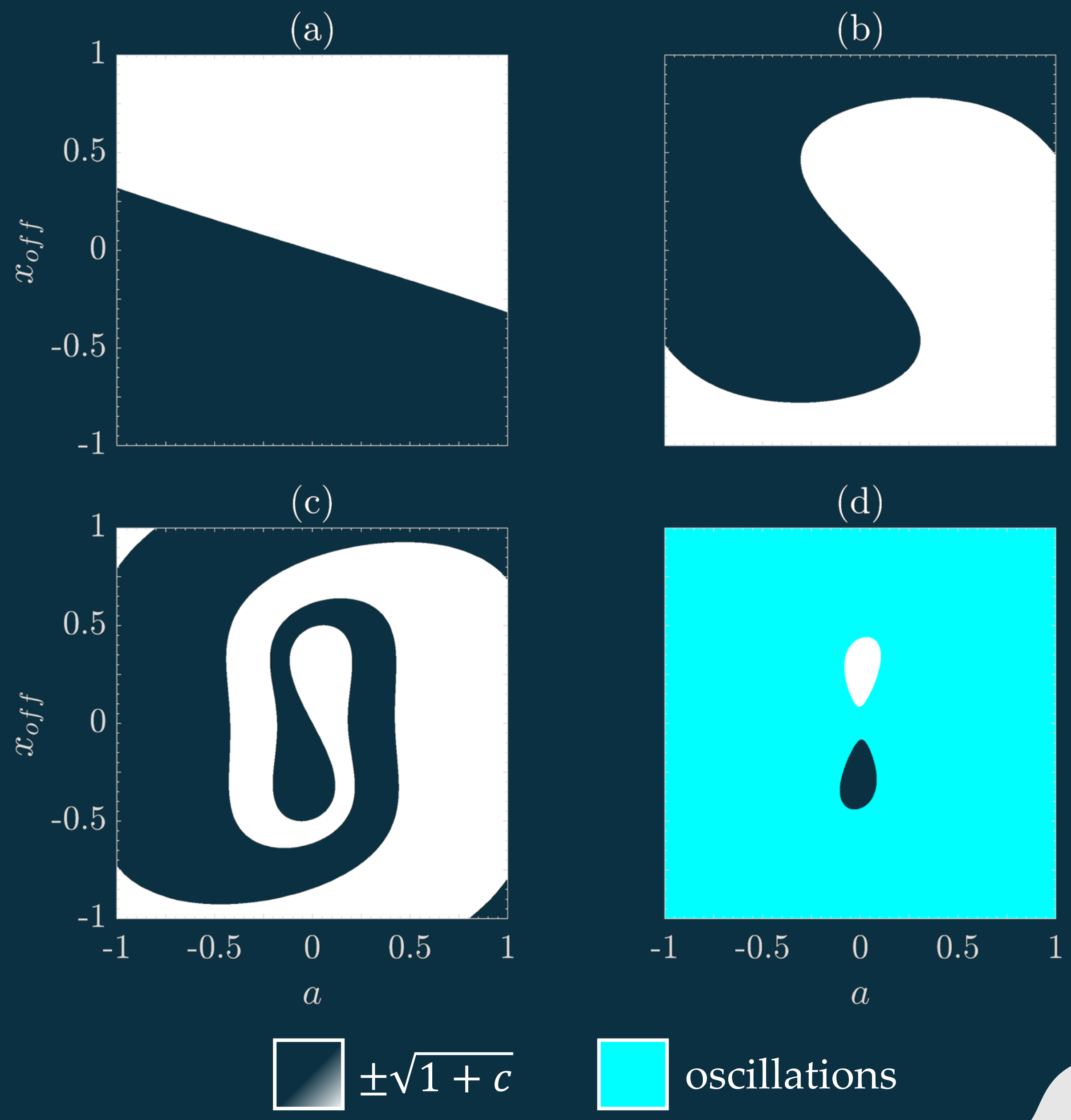
- Utilizamos Runge-Kutta de orden 2nd-3rd adaptado a sistemas con delay

- Se descarto un transitorio de 500 a.u. antes de determinar el atractor final

- Una función paramétrica:

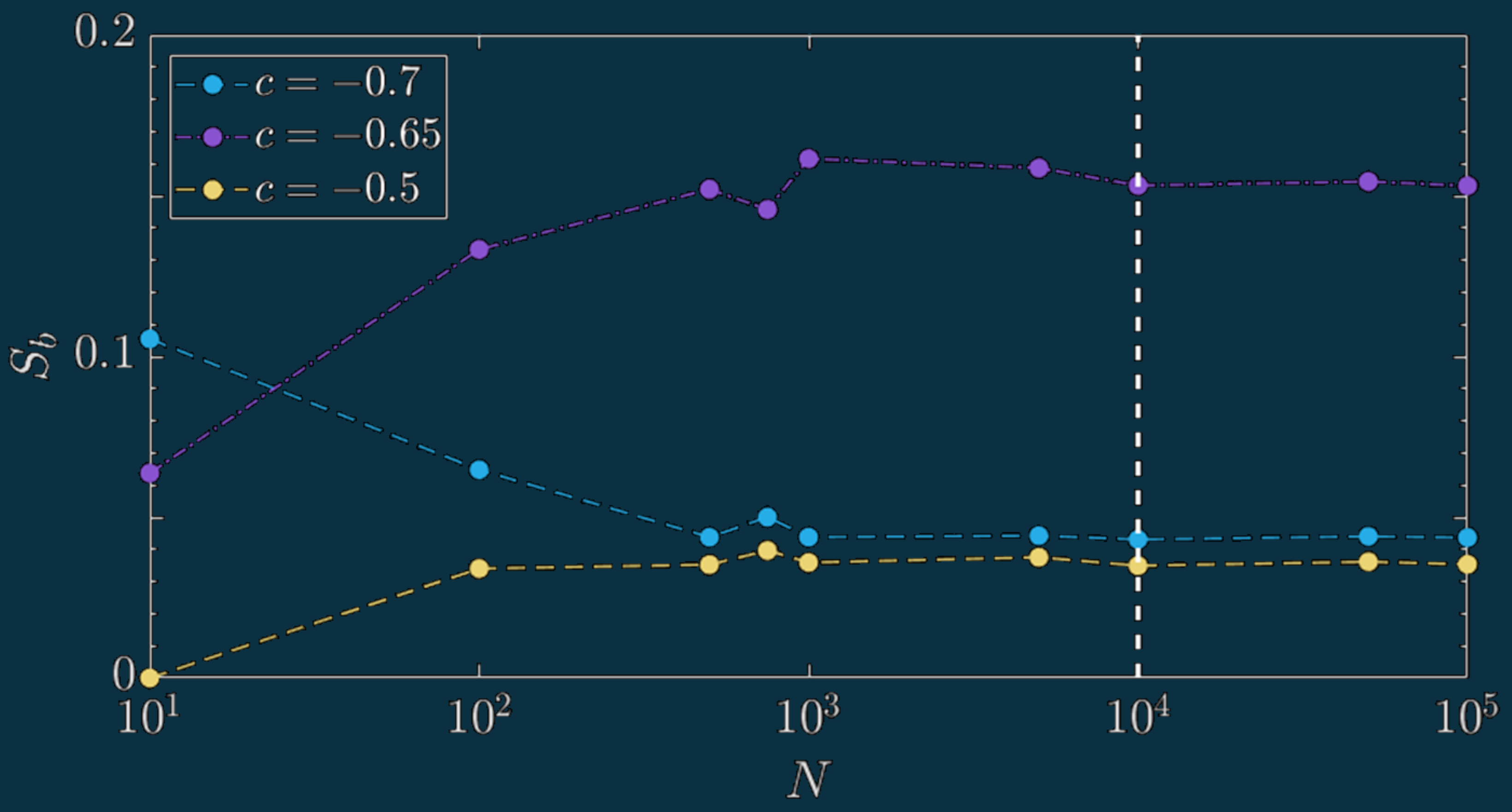
  $x_{in} = x_{off} + a\sin(t)\ \forall t \in [-\tau, 0]$

  utilizamos como condiciones iniciales

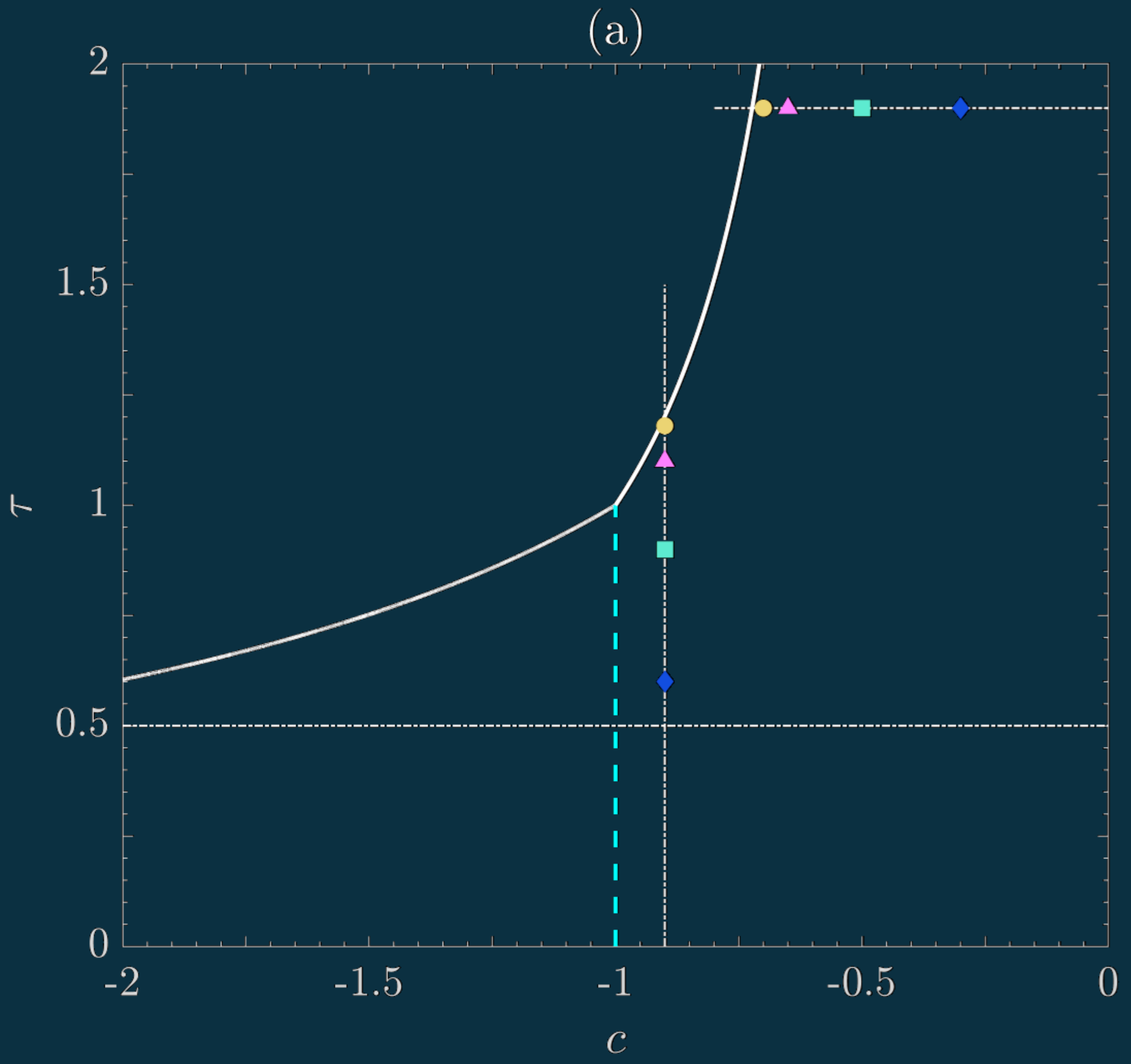


Calculation of basin entropy: role of the number of boxes

- Se tomaron 10^4 trayectorias para cada punto del espacio de parámetros
- Las cajas fueron tomadas de forma aleatoria
- La entropia de cuencas parece converger para 10^4 cajas

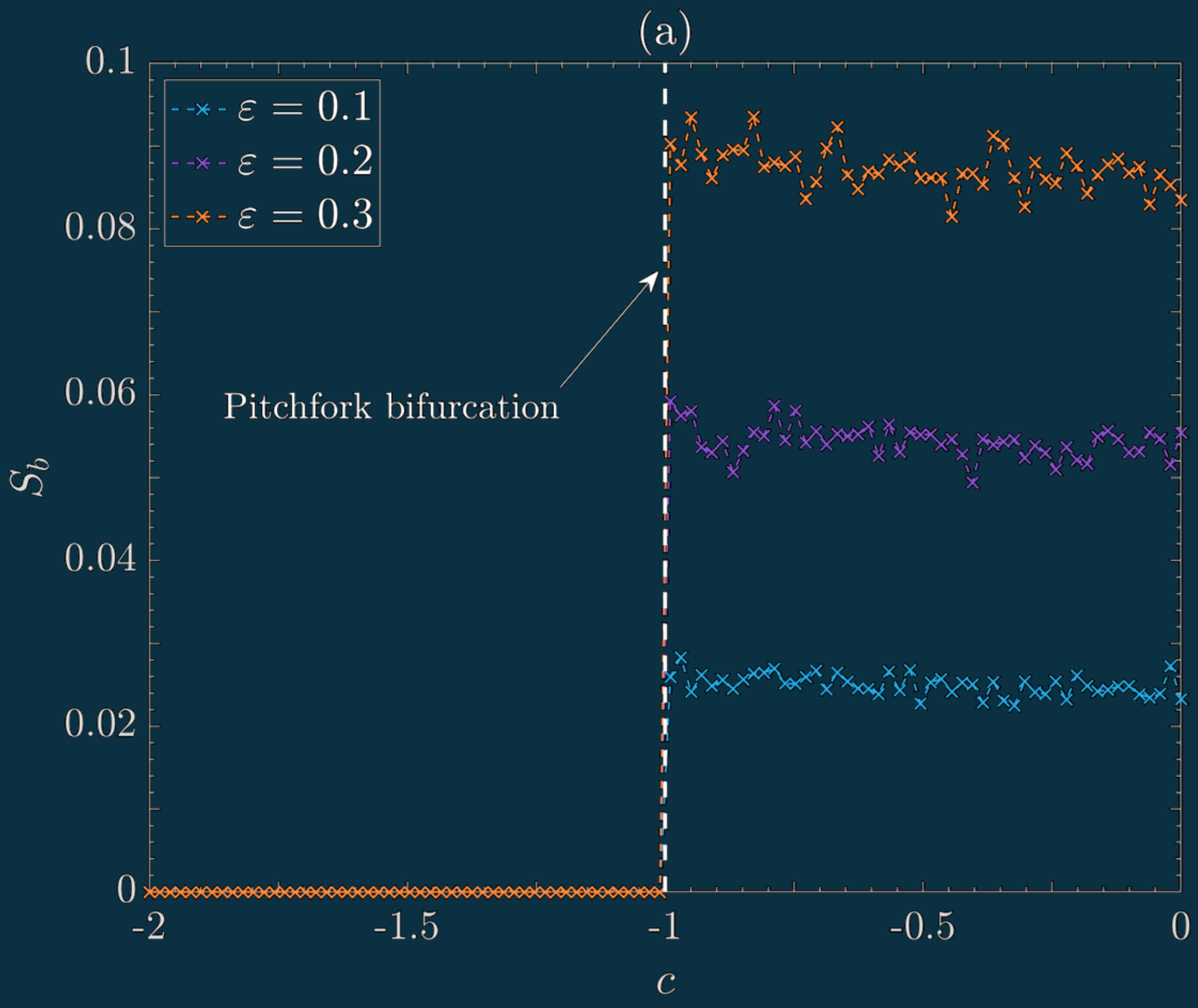


Bifurcación tridente

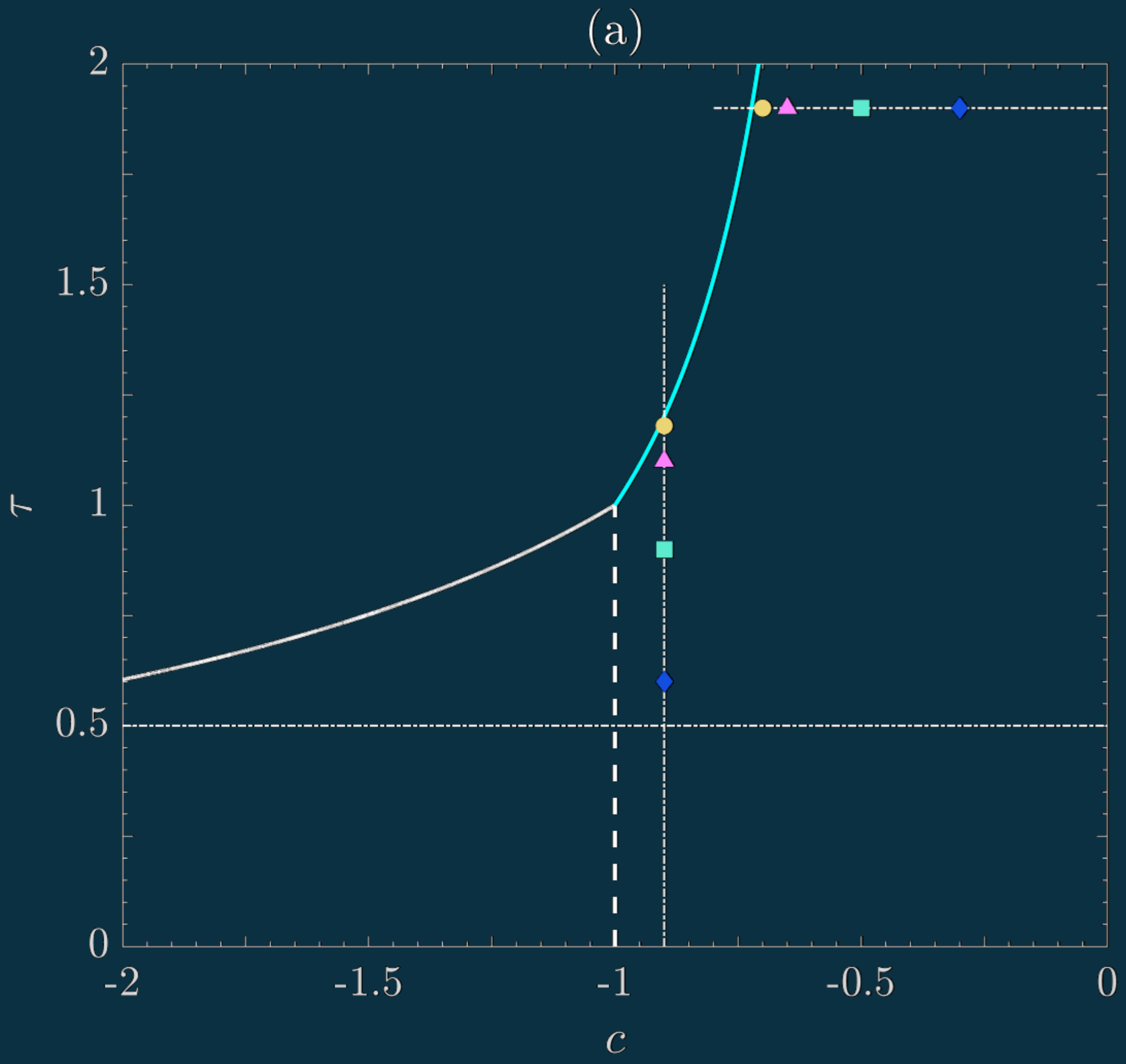


Bifurcación tridente

- Encontramos una bifurcacion tridente para $c = -1$ and $\tau < 1$
- La entropia de cuencas permanecio constante luego de la bifurcacion
- Esto es acorde con trabajos previos en sistemas sin delay



Bifurcación de Hopf

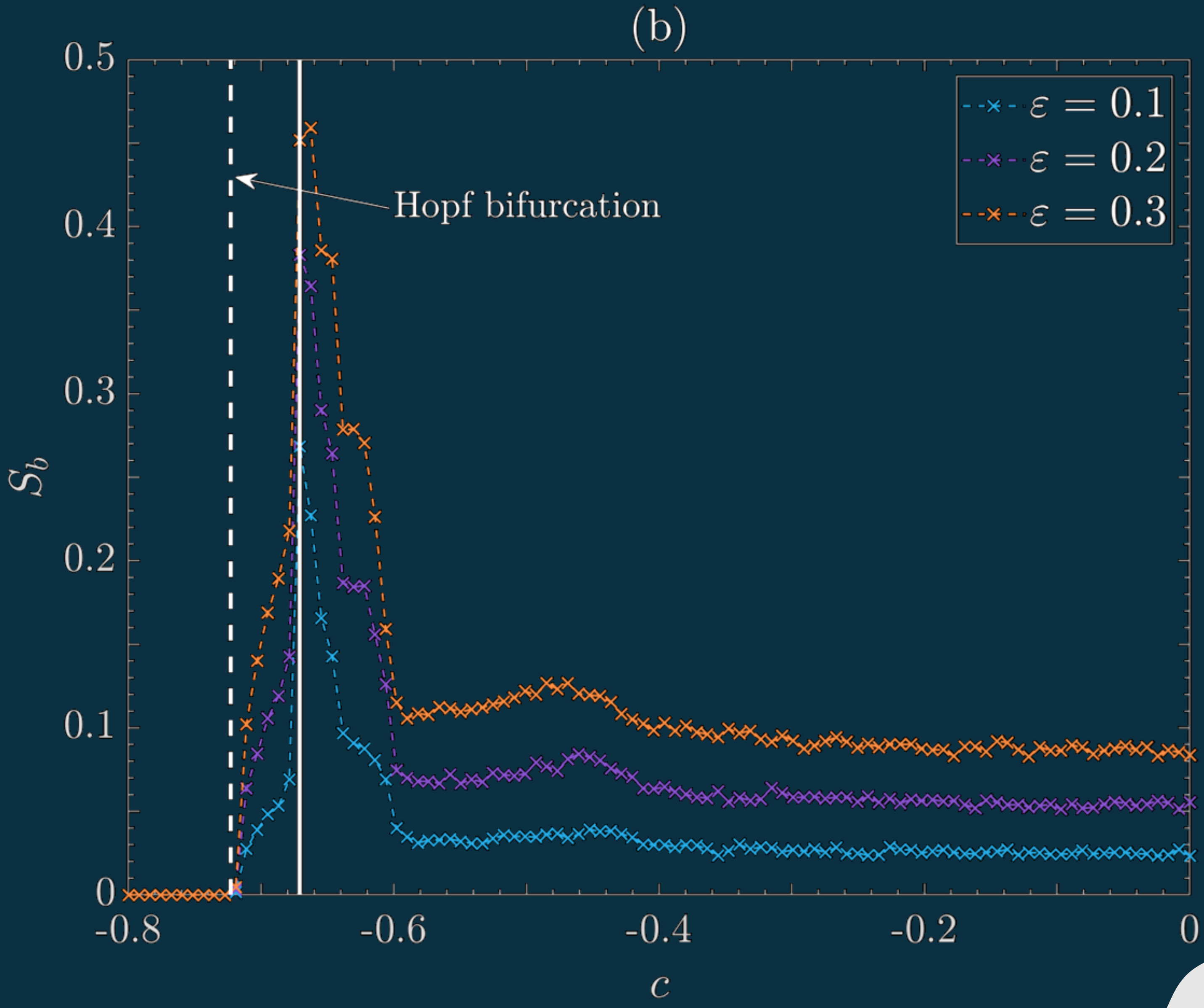


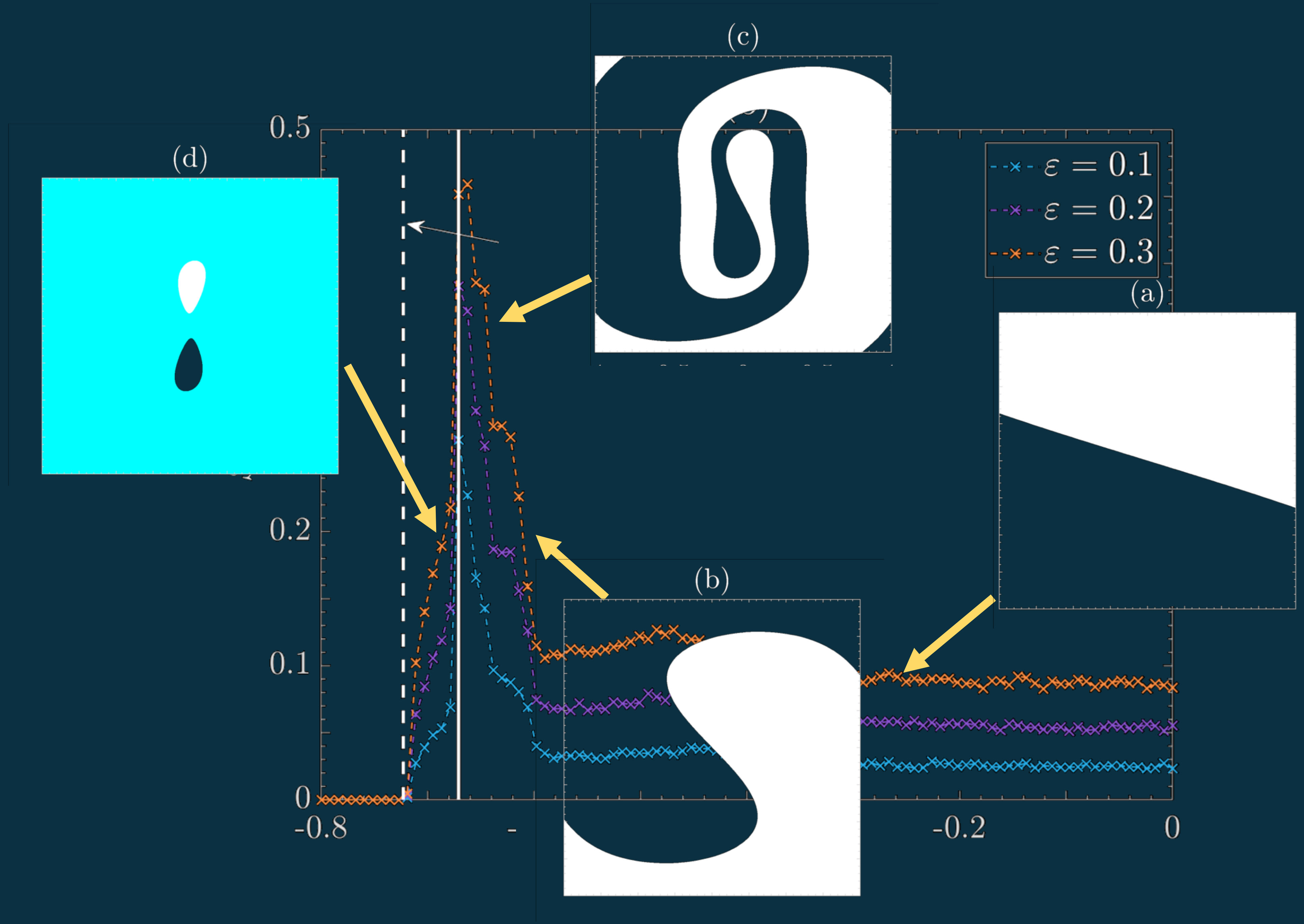
Bifurcación de Hopf

- La bifurcación de Hopf coincide con la hallada mediante LSA

- La entropía de cuencas presenta un comportamiento lineal en el entorno de la bifurcación de Hopf

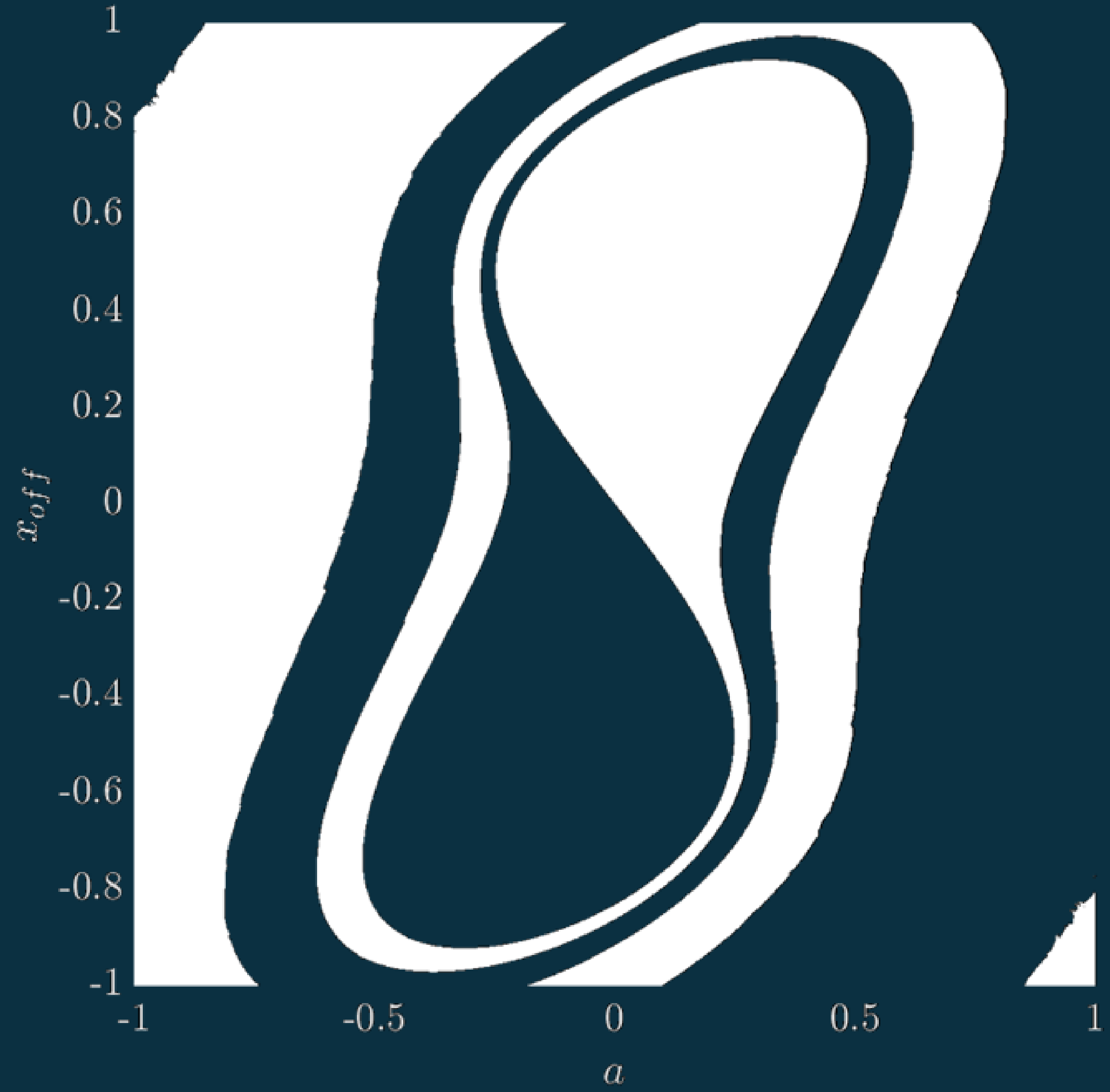
- Un máximo de entropía aparece cerca de la bifurcación de Hopf indicando una nueva bifurcacion

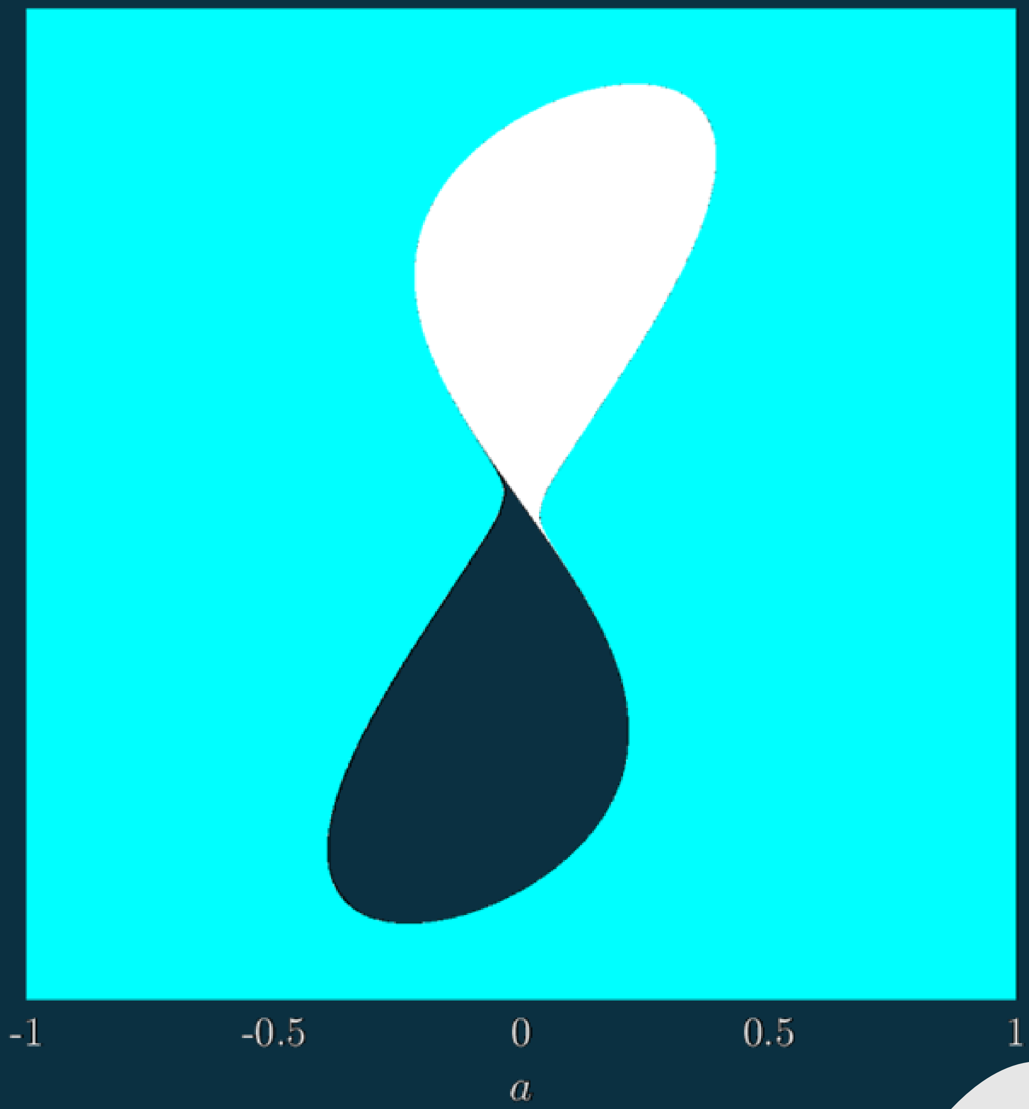




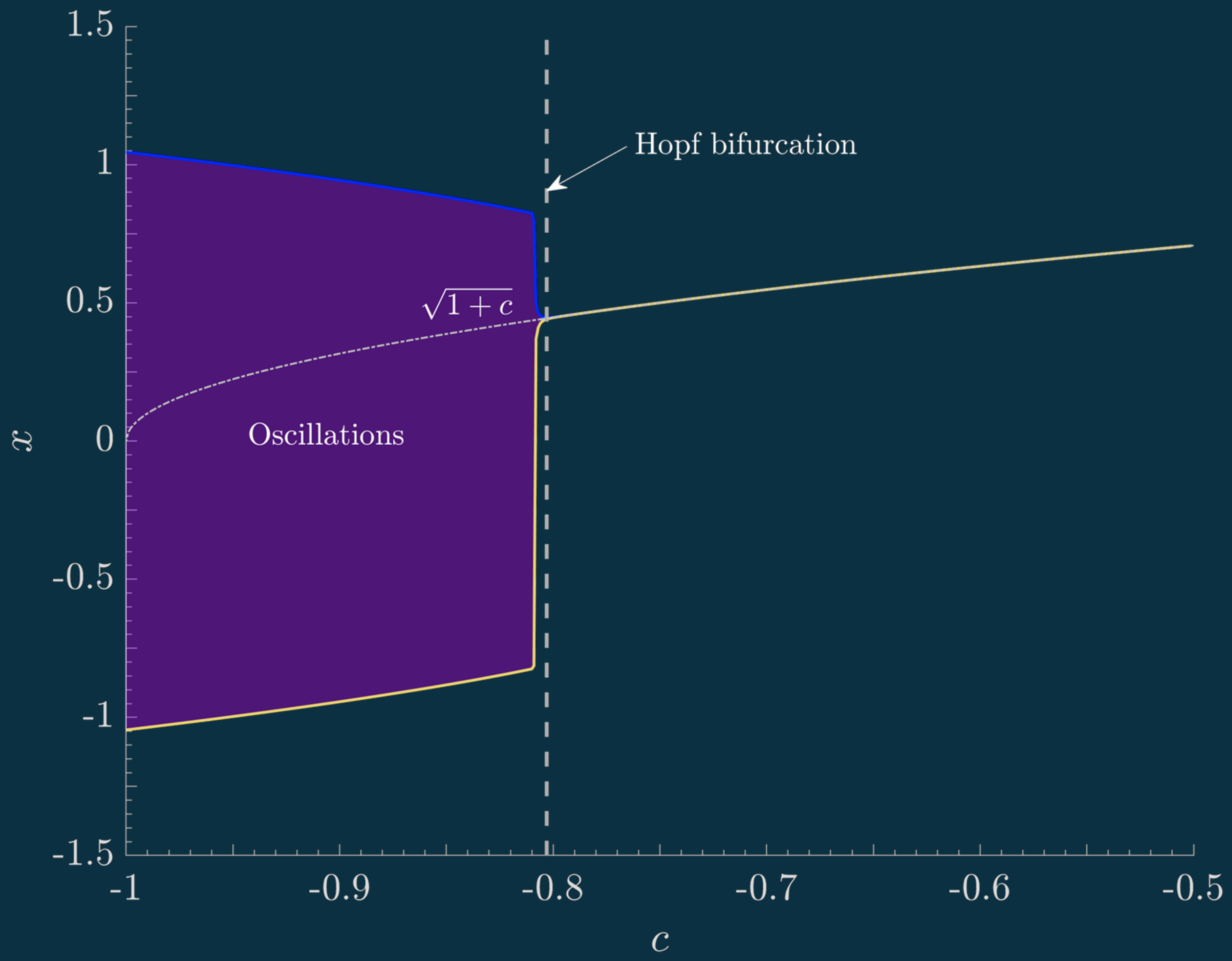
(c)
(d)
0.5
0.2
0.1
0
-0.8
-0.2
0
$\varepsilon = 0.1$
$\varepsilon = 0.2$
$\varepsilon = 0.3$
(a)
(b)

¿Qué pasa en el máximo?

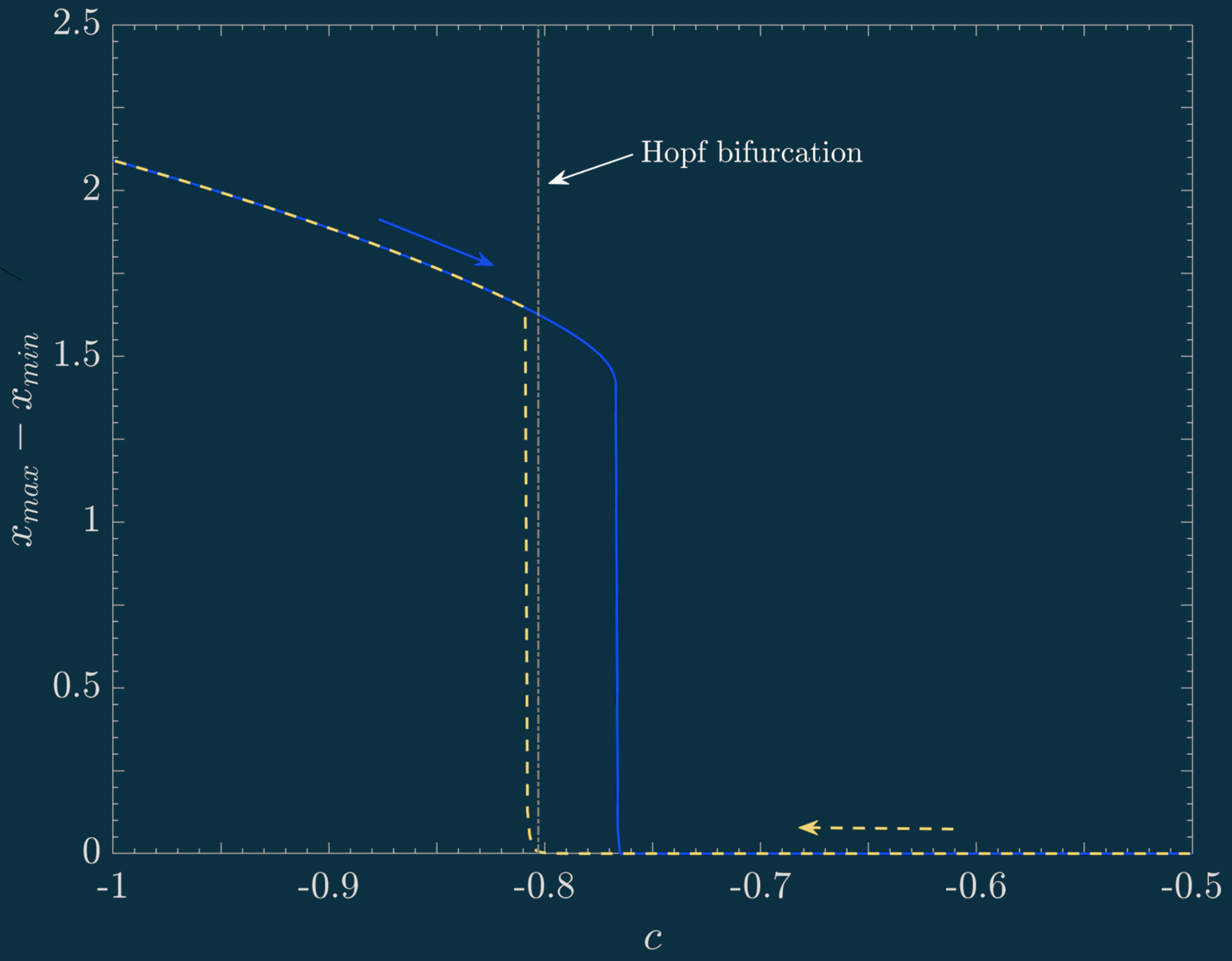




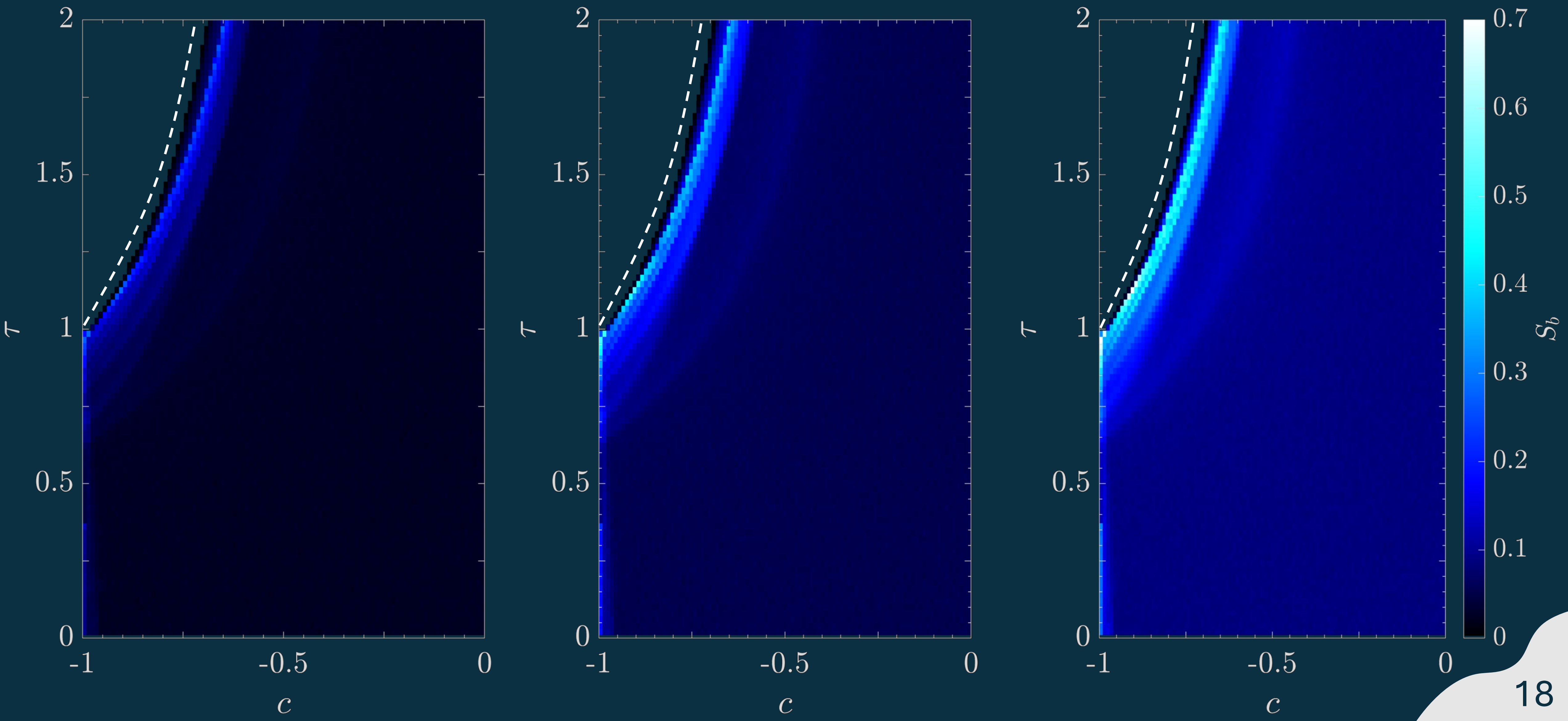
¿Qué pasa en el máximo?



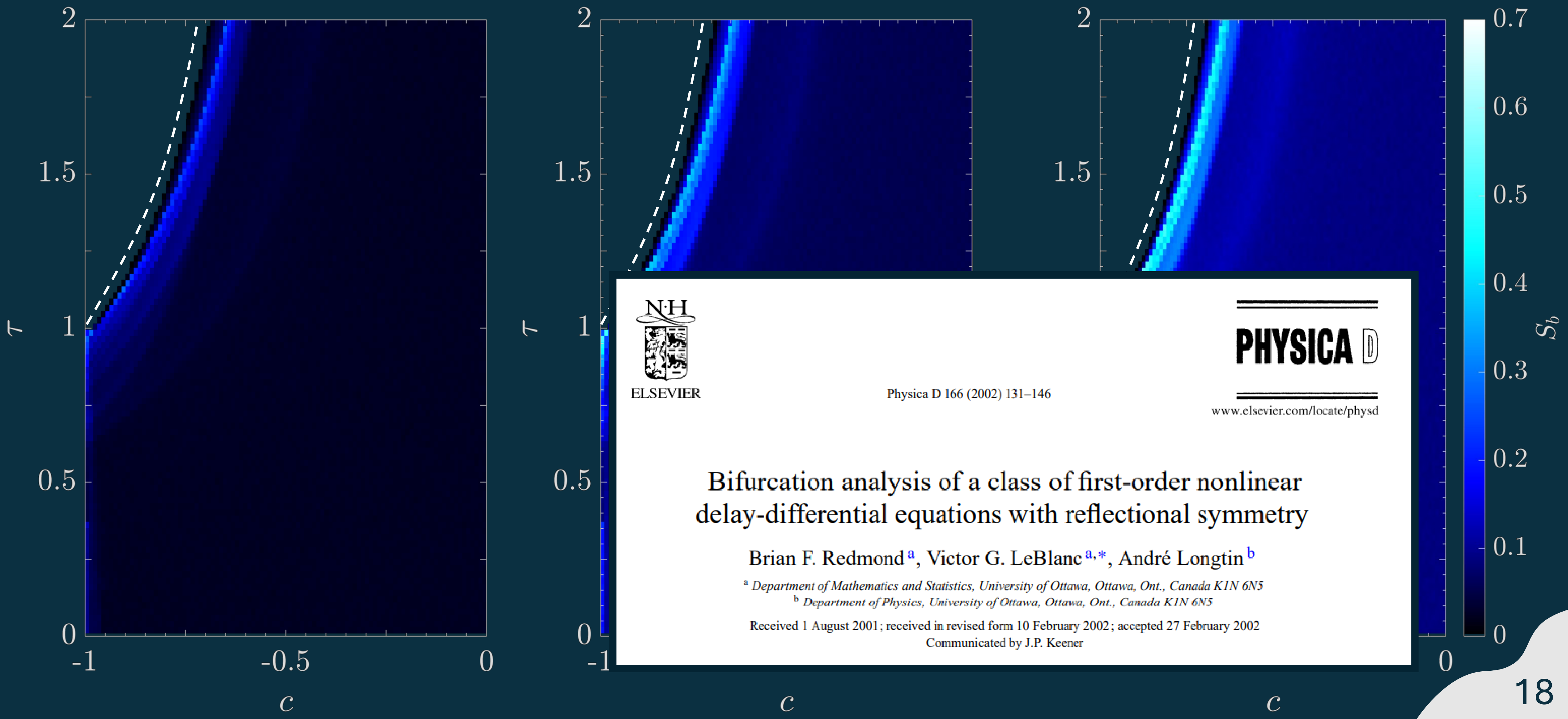
¿Qué pasa en el máximo?



Basin entropy in the parameter space



Basin entropy in the parameter space



N·H

ELSEVIER

Physica D 166 (2002) 131–146

PHYSICA D

www.elsevier.com/locate/physd

Bifurcation analysis of a class of first-order nonlinear delay-differential equations with reflectional symmetry

Brian F. Redmond [a], Victor G. LeBlanc [a,*], André Longtin [b]

[a] *Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, Ottawa, Ont., Canada K1N 6N5*

[b] *Department of Physics, University of Ottawa, Ottawa, Ont., Canada K1N 6N5*

Received 1 August 2001; received in revised form 10 February 2002; accepted 27 February 2002

Communicated by J.P. Keener

Conclusiones

- La entropía de cuencas puede capturar cambios en las cuencas de atracción que ocurren al variar los parámetros del sistema

- Encontramos la bifurcación de Hopf pero no la bifurcación de tridente

- A partir de la entropía de cuencas hallamos indicios de una nueva bifurcacion

- Este trabajo fue publicado recientemente →

RESEARCH ARTICLE | MAY 02 2024

Basin entropy as an indicator of a bifurcation in a time-delayed system

Special Collection: Data-Driven Models and Analysis of Complex Systems

Juan P. Tarigo ; Cecilia Stari ; Cristina Masoller ; Arturo C. Martí

Check for updates

Chaos 34, 053113 (2024)
https://doi.org/10.1063/5.0201932

Trabajo actual

Basin stability

nature physics

LETTERS

PUBLISHED ONLINE: 6 JANUARY 2013 | DOI: 10.1038/NPHYS2516

How basin stability complements the linear-stability paradigm

Peter J. Menck[1,2]*, Jobst Heitzig[1], Norbert Marwan[1] and Jürgen Kurths[1,2,3]

www.nature.com/scientificreports

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN

Basin stability in delayed dynamics

Siyang Leng[1,2], Wei Lin[1] & Jürgen Kurths[2,3,4]

Independencia de las condiciones iniciales

Basin stability en sistemas con delay

- Es la fracción del volumen que ocupa la cuenca de atracción en el espacio de fase

- Dada una base ortogonal $\{f_1, \ldots, f_n, \ldots\} \subset C[-\tau, 0]$ existe una secuencia $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ tal que:

$$x_n^{in} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n \rightarrow x^{in} \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

- Tomando un n finito podemos muestrear de forma aleatoria el espacio de fase

Basin stability en sistemas con delay

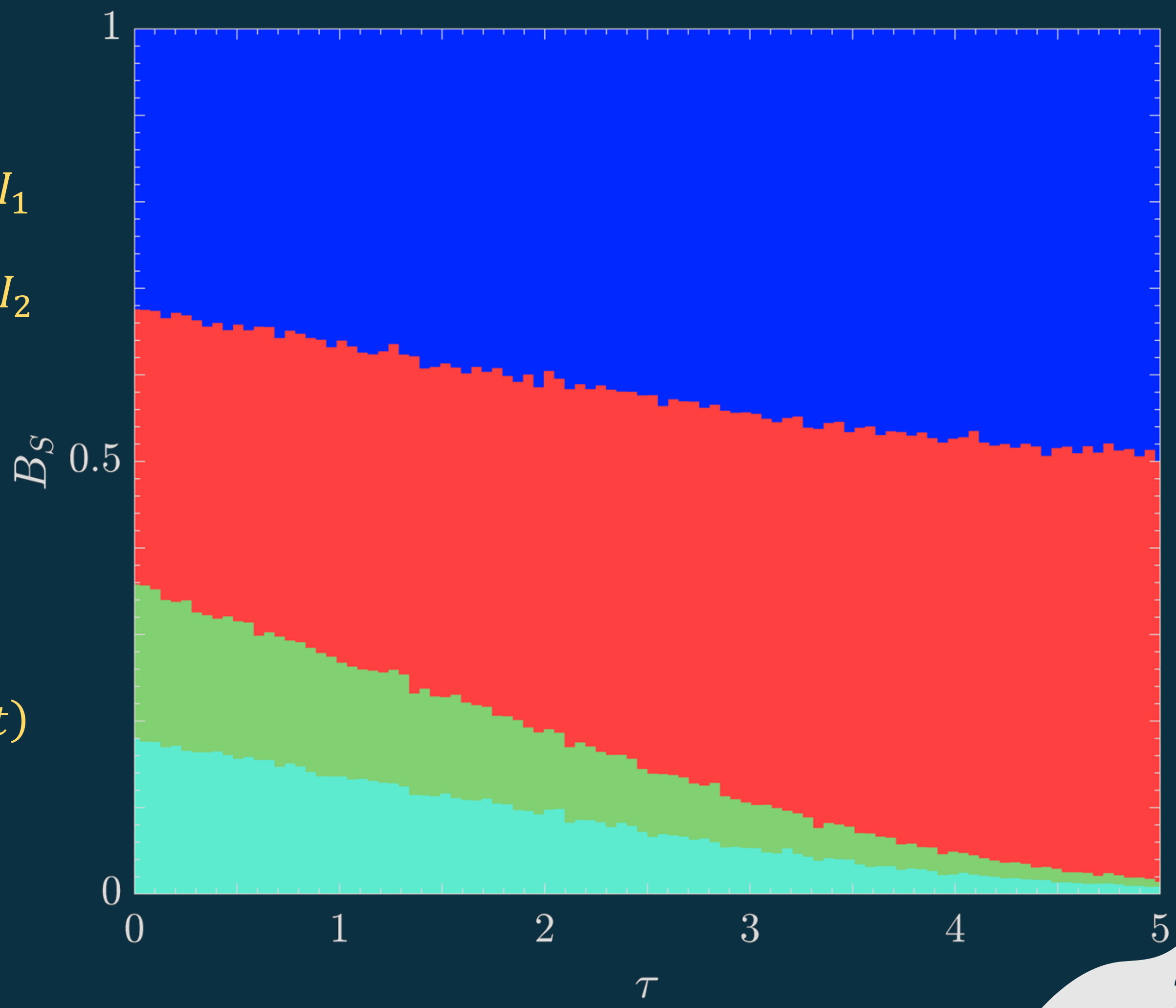
Modelo neuronal de Hopfield con delay

$$\dot{u}_1(t) = -bu_1(t) + af\big(u_1(t-\tau_s)\big) + a_{12}f\big(u_2(t-\tau_{12})\big) + I_1$$

$$\dot{u}_2(t) = -bu_2(t) + a_{21}f\big(u_1(t-\tau_{21})\big) + af\big(u_2(t-\tau_s)\big) + I_2$$

Condiciones iniciales:

$$x^{in} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + a_1\cos(2\pi t) + a_2\sin(2\pi t) + \cdots + a_n\cos(2n\pi t)$$



Independencia de las condiciones iniciales

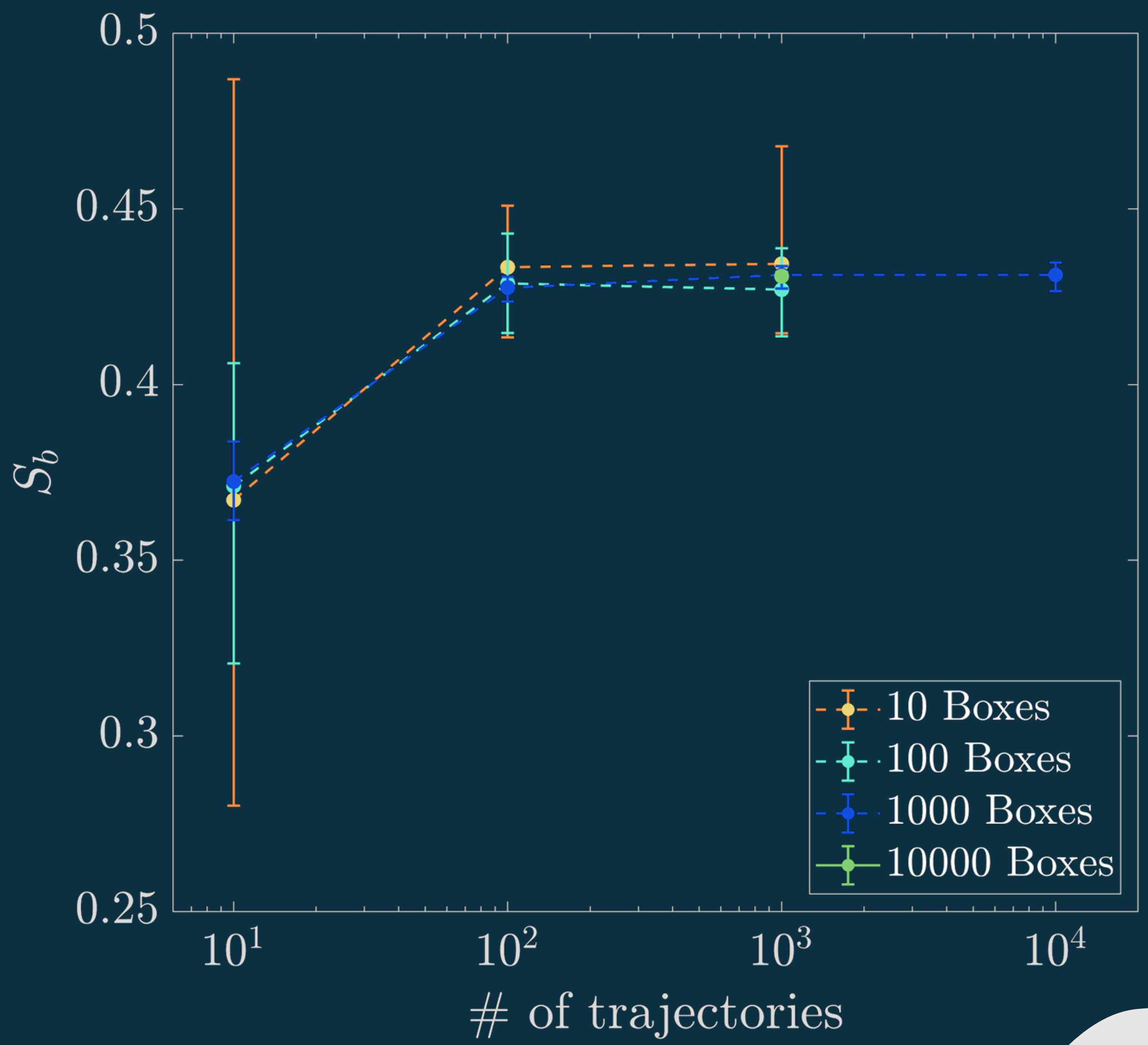
Entropía de cuencas

- Sistema de Mackey-Glass:

$$\begin{cases} x_i = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N-1 \\ x_N = x_{N-1} e^{-\frac{\Gamma}{N}} + \left(1 - e^{-\frac{\Gamma}{N}}\right) \alpha \frac{x_1}{1+x_1^n} \end{cases}$$

- $N = 396$

- Tomamos 1000 trayectorias en 100 cajas



Independencia de las condiciones iniciales

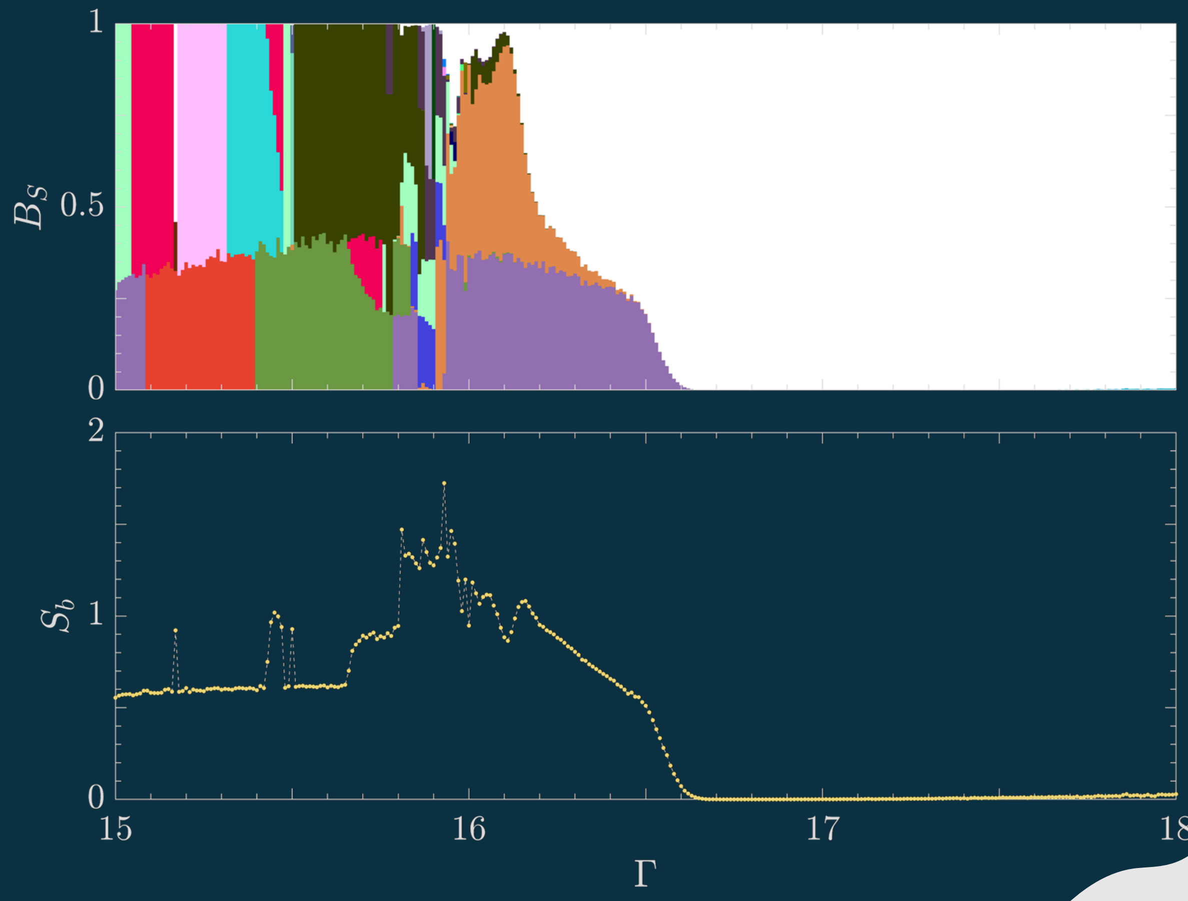
Entropía de cuencas

- Sistema de Mackey-Glass:

$$\begin{cases} x_i = x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N-1 \\ x_N = x_{N-1} e^{-\frac{\Gamma}{N}} + \left(1 - e^{-\frac{\Gamma}{N}}\right) \alpha \frac{x_1}{1+x_1^n} \end{cases}$$

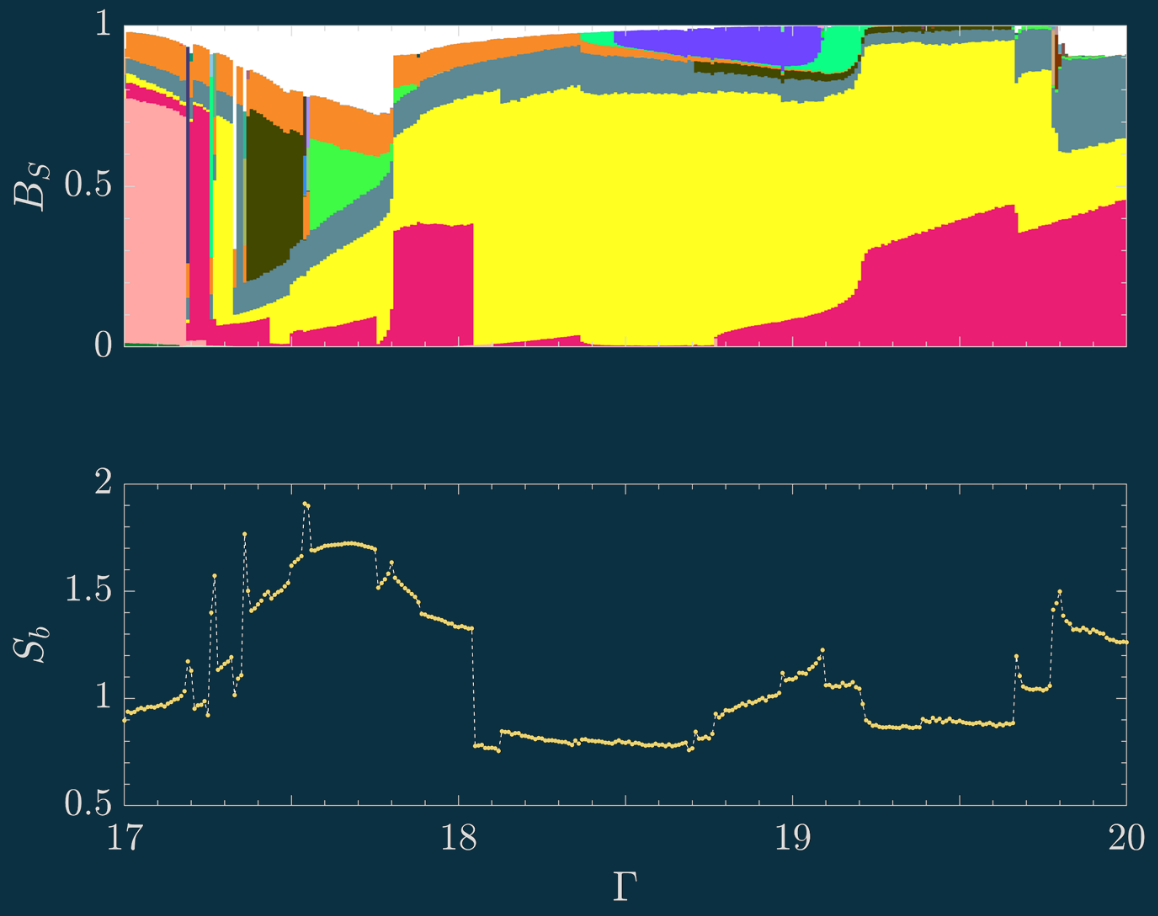
- $N = 396$

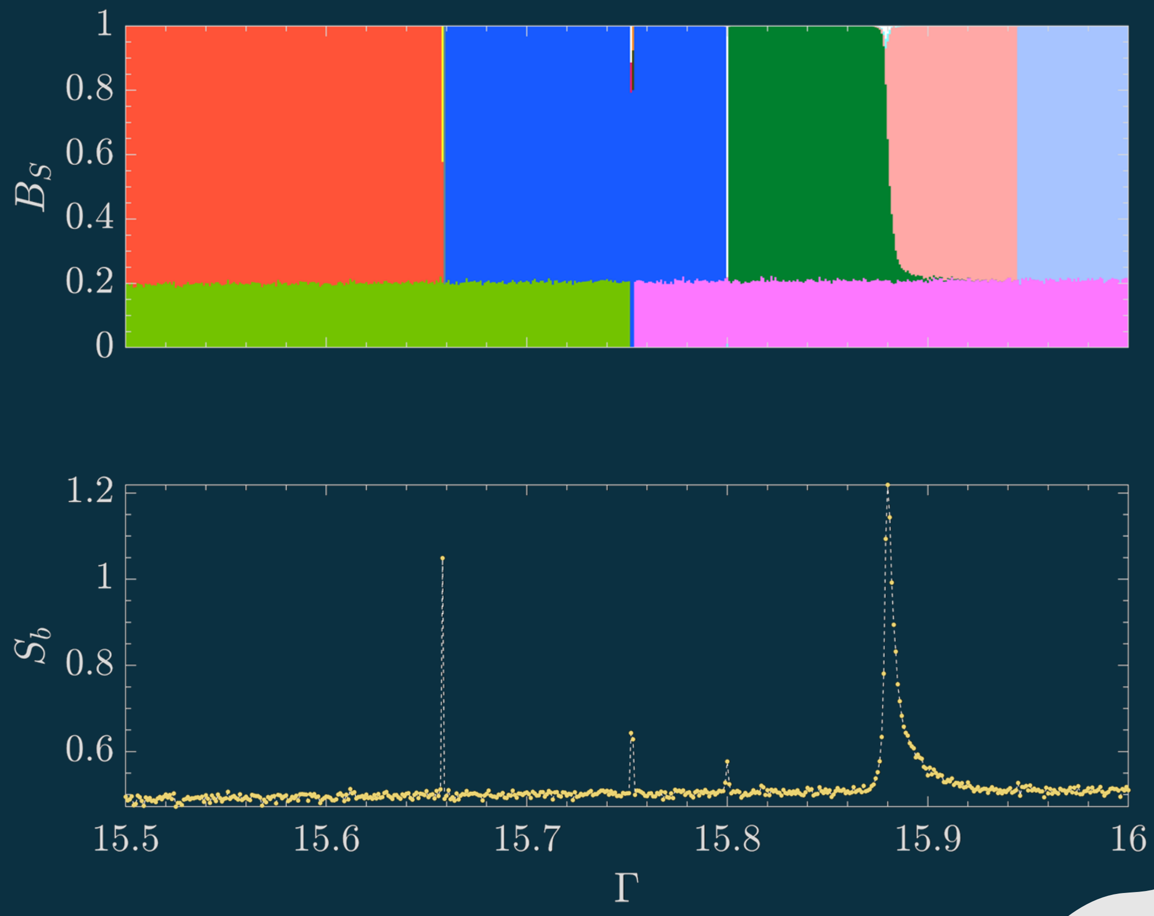
- Tomamos 1000 trayectorias en 100 cajas



Independencia de las condiciones iniciales

Entropía de cuencas





¡Gracias!

¡Gracias!

RESEARCH ARTICLE | MAY 02 2024

Basin entropy as an indicator of a bifurcation in a time-delayed system

Special Collection: Data-Driven Models and Analysis of Complex Systems

Juan P. Tarigo ; Cecilia Stari ; Cristina Masoller ; Arturo C. Martí

Check for updates

Chaos 34, 053113 (2024)
https://doi.org/10.1063/5.0201932